PUCE CENTRO DE EDUCACIÓN VIRTUAL

TUTORIAL
sobre Asíntotas Verticales y Horizontales

•••

Cálculo 1

Tutorial sobre Asíntotas Verticales y Horizontales

Introducción

En el análisis de funciones, las asíntotas son líneas que la gráfica de la función se aproxima a medida que la variable independiente se acerca a un valor específico o se aleja hacia el infinito. Las asíntotas pueden ser verticales, horizontales o inclinadas. En este tutorial, nos enfocaremos en las asíntotas verticales y horizontales utilizando límites y ejemplos gráficos.

Asíntotas Verticales

Una asíntota vertical ocurre cuando la función se aproxima a un valor infinito (positivo o negativo) a medida que la variable independiente se acerca a un valor específico. Matemáticamente, si $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = a$, entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$$

Ejemplo 1: $f(x) = \frac{1}{x-2}$

Para encontrar las asíntotas verticales, buscamos los valores de x que hacen que el denominador sea cero.

$$x - 2 = 0 \implies x = 2$$

Entonces, $x = 2$ es una asíntota vertical.

Límites:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

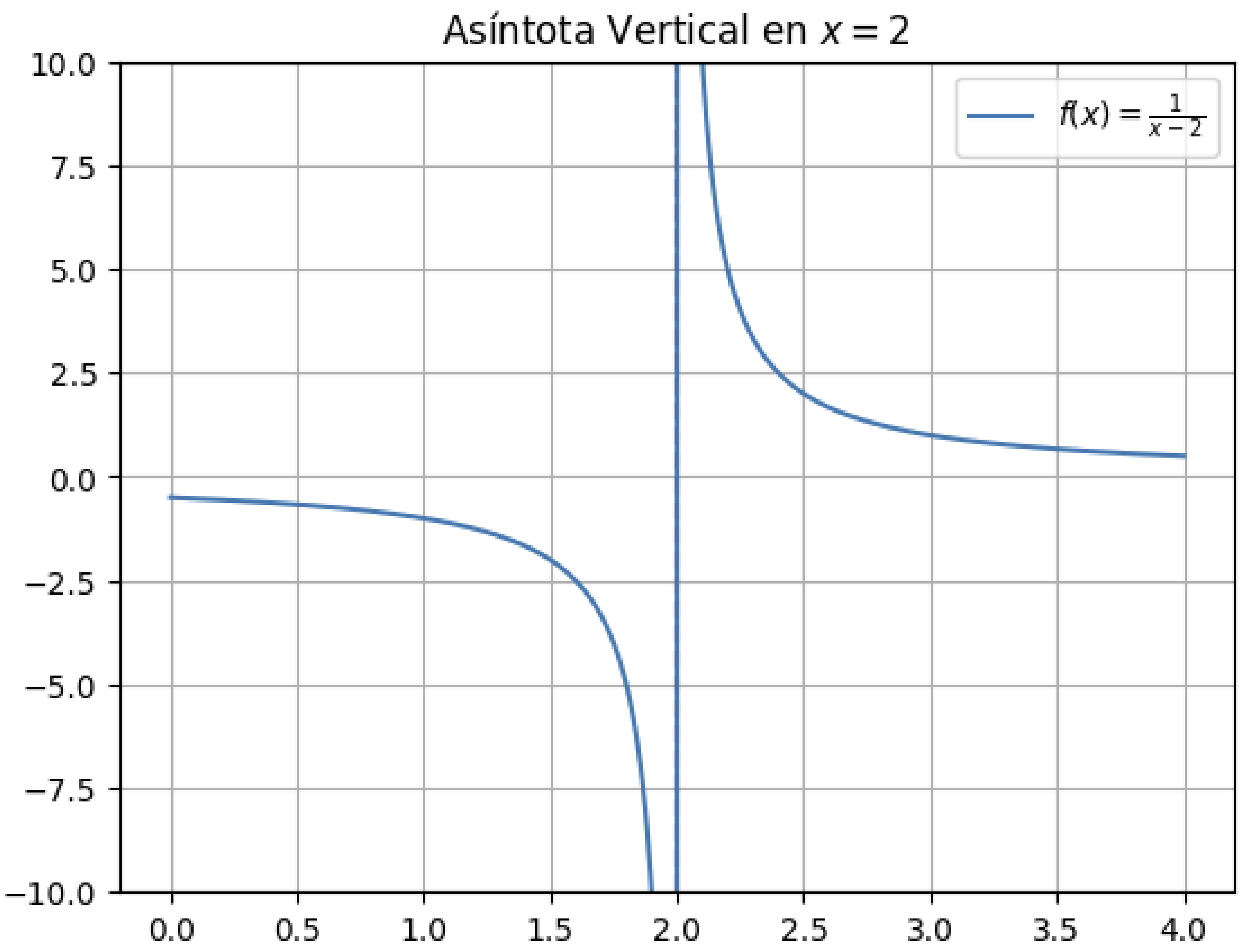
$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

Gráfica:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(0, 4, 400)
y = 1 / (x - 2)

plt.axvline(x=2, color='r', linestyle='--')
plt.plot(x, y, label=r'$f(x) = \frac{1}{x-2}$')
plt.ylim(-10, 10)
plt.legend()
plt.title('Asíntota Vertical en $x = 2$')
plt.grid(True)
plt.show()
```



Asíntotas Horizontales

Introducción

En el análisis de funciones, las asíntotas horizontales son líneas a las que la gráfica de una función se aproxima a medida que la variable independiente se aleja hacia el infinito, ya sea en la dirección positiva o negativa. Una asíntota horizontal indica el valor al que se acerca la función cuando x tiende a ∞ o $-\infty$.

Definición Matemática

Una asíntota horizontal de la función $f(x)$ es una línea horizontal $y = L$ tal que:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Esto significa que a medida que x tiende a infinito positivo o negativo, el valor de $f(x)$ se aproxima a L.

Ejemplo 1: $f(x) = \frac{2x}{x+1}$

Para encontrar las asíntotas horizontales, evaluamos los límites cuando x tiende a ∞ y $-\infty$.

Cálculo de Límites

Límite cuando $x \to \infty$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{x}} = 2$$

Límite cuando $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{x}} = 2$$

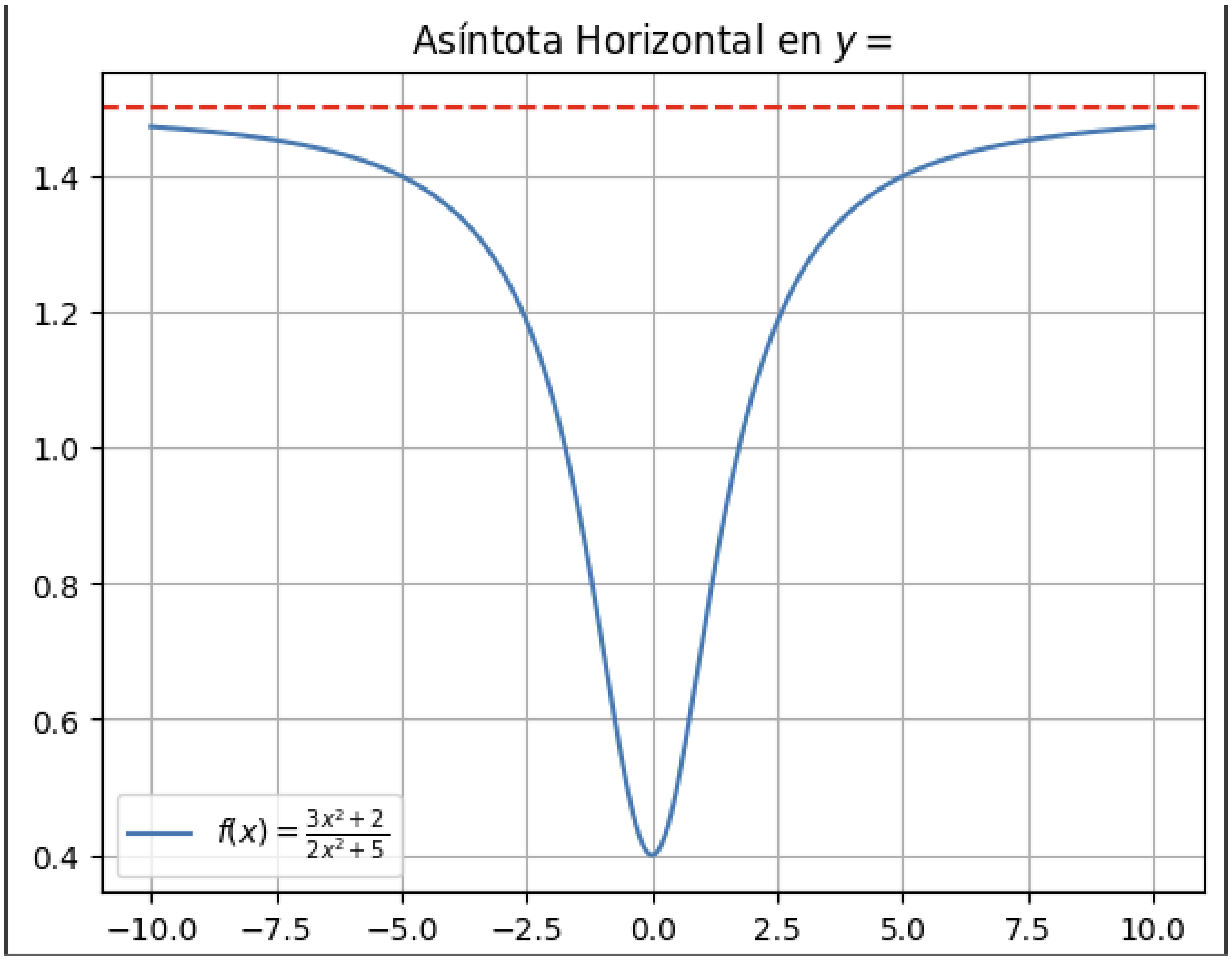
Entonces, $y = 2$ es una asíntota horizontal.

Gráfica:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(-10, 10, 400)
y = 2 * x / (x + 1)

plt.axhline(y=2, color='r', linestyle='--')
plt.plot(x, y, label=r'$f(x) = \frac{2x}{x+1}$')
plt.legend()
plt.title('Asíntota Horizontal en $y = 2$')
plt.grid(True)
plt.show()
```



Ejercicios Propuestos sobre Asíntotas Verticales y Horizontales

Ejercicio 1

Función: $f(x) = \frac{3x^2-2}{x^2-4}$

1. **Asíntotas Verticales:**
   - Encuentra los valores de x que hacen que el denominador sea cero.
   - Determina los límites laterales para confirmar la existencia de las asíntotas verticales.

2. **Asíntotas Horizontales:**
   - Evalúa los límites cuando x tiende a ∞ y $-\infty$ para encontrar posibles asíntotas horizontales.

Solución:

- **Asíntotas Verticales:**

$$x^2 - 4 = 0 \implies x = \pm 2$$

Entonces, $x = 2$ y $x = -2$ son asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{3x^2 - 2}{x^2 - 4} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{3x^2 - 2}{x^2 - 4} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{3x^2 - 2}{x^2 - 4} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{3x^2 - 2}{x^2 - 4} = +\infty$$

- **Asíntotas Horizontales:**

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 2}{x^2 - 4} = 3$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2 - 2}{x^2 - 4} = 3$$

Entonces, $y = 3$ es una asíntota horizontal.

Ejercicio 2

Función: $f(x) = \frac{x^2-1}{x-3}$

1. **Asíntotas Verticales:**
   - Encuentra los valores de x que hacen que el denominador sea cero.
   - Determina los límites laterales para confirmar la existencia de las asíntotas verticales.
2. **Asíntotas Horizontales:**
   - Evalúa los límites cuando x tiende a ∞ y $-\infty$ para encontrar posibles asíntotas horizontales.

Solución:

- **Asíntotas Verticales:**

$$x - 3 = 0 \implies x = 3$$

Entonces, $x = 3$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 - 1}{x - 3} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 - 1}{x - 3} = -\infty$$

- **Asíntotas Horizontales:**

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x - 3} \approx x$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{x - 3} \approx x$$

No hay asíntotas horizontales porque el grado del numerador es mayor que el grado del denominador.

Ejercicio 3

Función: $f(x) = \frac{5x^3 - 2x}{2x^3 + 3}$

1. **Asíntotas Verticales:**
    - Encuentra los valores de x que hacen que el denominador sea cero.
    - Determina los límites laterales para confirmar la existencia de las asíntotas verticales.
2. **Asíntotas Horizontales:**
    - Evalúa los límites cuando x tiende a ∞ y $-\infty$ para encontrar posibles asíntotas horizontales.

Solución:

- **Asíntotas Verticales:**

$$2x^3 + 3 = 0 \implies x = -\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

Entonces, $x = -\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x \to -\sqrt[3]{3/2}^+} \frac{5x^3 - 2x}{2x^3 + 3} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\sqrt[3]{3/2}^-} \frac{5x^3 - 2x}{2x^3 + 3} = -\infty$$

- **Asíntotas Horizontales:**

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x^3 - 2x}{2x^3 + 3} = \frac{5}{2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^3 - 2x}{2x^3 + 3} = \frac{5}{2}$$

Entonces, $y = \frac{5}{2}$ es una asíntota horizontal.

Ejercicio 4

Función: $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

1. **Asíntotas Verticales:**

   - Encuentra los valores de x que hacen que el denominador sea cero.
   - Determina los límites laterales para confirmar la existencia de las asíntotas verticales.

2. **Asíntotas Horizontales:**

   - Evalúa los límites cuando x tiende a ∞ y $-\infty$ para encontrar posibles asíntotas horizontales.

Solución:

- **Asíntotas Verticales:**
  No hay valores de x que hagan que $x^2+1=0$, así que no hay asíntotas verticales.

- **Asíntotas Horizontales:**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$$

  Entonces, $y=1$ es una asíntota horizontal.

Conclusión

Estos ejercicios te ayudarán a practicar la identificación y el cálculo de asíntotas verticales y horizontales en diversas funciones. Utiliza los límites para determinar el comportamiento de las funciones y confirma tus resultados con representaciones gráficas cuando sea posible.

PUCE

CENTRO DE EDUCACIÓN VIRTUAL

Encuéntranos

Email: soportevirtual@puce.edu.ec / **Teléfonos:** (593) (02) 299 1700 Ext. 2517 y 2518
Av. 12 de Octubre 1076 y Roca. Edificio de la facultad de comunicación, lingüística y literatura 2do. piso