



TUTORIAL

**sobre la Regla de
L'Hôpital y Razones de Cambio**

...

Cálculo 1

Tutorial sobre la Regla de L'Hôpital y Razones de Cambio

Introducción

La regla de L'Hôpital es una herramienta útil en el cálculo para resolver límites indeterminados. Esta regla se aplica a límites de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Por otro lado, las razones de cambio nos ayudan a entender cómo una cantidad cambia en relación con otra, siendo fundamentales en la comprensión de derivadas.

Regla de L'Hôpital

Definición

Si $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ resulta en una forma indeterminada $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, entonces se puede aplicar la regla de L'Hôpital :

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre y cuando el límite del lado derecho exista.

Ejemplo 1

Calculemos el límite :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

Aplicamos la regla de L'Hôpital :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1$$

Ejemplo 2

Calculemos el límite :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}$$

Aplicamos la regla de L'Hôpital :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

Razones de Cambio

Definición

La razón de cambio de una función $f(x)$ en un punto x se refiere a la derivada $f'(x)$, que representa la tasa a la cual cambia $f(x)$ con respecto a x .

Ejemplo 1

Si $f(x) = x^2$, entonces la razón de cambio es :

$$f'(x) = 2x$$

Ejemplo 2

Si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces la razón de cambio es :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ejercicios Propuestos

Ejercicio 1 : Regla de L'Hôpital

Calcule el siguiente límite usando la regla de L'Hôpital :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Ejercicio 2 : Regla de L'Hôpital

Calcule el siguiente límite usando la regla de L'Hôpital :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

Ejercicio 3 : Razones de Cambio

Encuentre la razón de cambio de la función $f(x) = \ln(x)$ en el punto $x = e$.

Ejercicio 4 : Razones de Cambio

Encuentre la razón de cambio de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en el punto $x = 1$.

Soluciones Propuestas

Ejercicio 1 : Solución

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

Como esto da una forma indeterminada $\frac{0}{0}$, aplicamos la regla de L'Hôpital :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1} = 2$$

Ejercicio 2 : Solución

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

Aplicamos la regla de L'Hôpital :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1$$

Ejercicio 3 : Solución

Para $f(x) = \ln(x)$, la razón de cambio es :

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

En el punto $x = e$:

$$f'(e) = \frac{1}{e}$$

Ejercicio 4 : Solución

Para $f(x) = \frac{1}{x}$, la razón de cambio es :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

En el punto $x = 1$:

$$f'(1) = -1$$

Conclusión

La regla de L'Hôpital y las razones de cambio son herramientas esenciales en el cálculo. La regla de L'Hôpital nos permite resolver límites indeterminados de manera efectiva, mientras que las razones de cambio nos proporcionan información sobre la tasa a la cual cambian las funciones. Practicar con ejercicios ayuda a consolidar la comprensión de estos conceptos fundamentales. ¡Buena suerte con los ejercicios propuestos!

Ejercicios Propuestos sobre la Regla de L'Hôpital y Razones de Cambio

Ejercicio 1 : Regla de L'Hôpital

Calcule el siguiente límite usando la regla de L'Hôpital :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

Pasos para resolver el ejercicio :

1. **Identifique la forma indeterminada :**

— Evalúe el límite directamente : $\frac{2^3-8}{2-2} = \frac{0}{0}$, que es una forma indeterminada.

2. **Aplique la regla de L'Hôpital :**

— Derive el numerador y el denominador : $\frac{d}{dx}(x^3 - 8) = 3x^2$ y $\frac{d}{dx}(x - 2) = 1$.

— Calcule el límite de las derivadas : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2}{1}$.

3. **Evalúe el límite :**

— Sustituya $x = 2$ en la expresión resultante : $\frac{3(2)^2}{1} = 12$.

Respuesta :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = 12$$

Ejercicio 2 : Razones de Cambio

Encuentre la razón de cambio de la función $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ en el punto $x = 2$.

Pasos para resolver el ejercicio :

1. **Derive la función :**

— Use la regla del cociente : $f'(x) = \frac{(x^2+3)'(x-1) - (x^2+3)(x-1)'}{(x-1)^2}$.

— Calcule las derivadas : $(x^2 + 3)' = 2x$ y $(x - 1)' = 1$.

— Sustituya en la regla del cociente : $f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+3)(1)}{(x-1)^2}$.

2. **Simplifique la derivada :**

— Desarrolle las operaciones : $f'(x) = \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 3}{(x-1)^2}$.

— Combine términos similares : $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$.

3. **Evalúe la derivada en el punto dado :**

— Sustituya $x = 2$ en $f'(x)$: $f'(2) = \frac{(2)^2 - 2(2) - 3}{(2-1)^2}$.

— Calcule el valor : $f'(2) = \frac{4-4-3}{1} = -3$.

Respuesta :

La razón de cambio de $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ en el punto $x = 2$ es -3 .

Conclusión

Estos ejercicios te ayudarán a practicar el uso de la regla de L'Hôpital para resolver límites indeterminados y a calcular las razones de cambio de funciones mediante la derivada. Asegúrate de seguir los pasos detalladamente para obtener la solución correcta. ¡Buena suerte!



PUCE

CENTRO DE EDUCACIÓN VIRTUAL



Encuétranos



Email: soportevirtual@puce.edu.ec / **Teléfonos:** (593) (02) 299 1700 Ext. 2517 y 2518
Av. 12 de Octubre 1076 y Roca. Edificio de la facultad de comunicación, lingüística y literatura 2do. piso