



Profundiza más

Recurso de Profundización

Flujo de un líquido a través de una tubería cilíndrica

En la mecánica de fluidos, es común analizar el flujo de líquidos a través de conductos cilíndricos, como tuberías. Supongamos que se desea calcular la cantidad total de fluido que atraviesa una sección transversal circular de una tubería por unidad de tiempo. La velocidad del flujo en cada punto de la sección transversal depende de la distancia al centro de la tubería, debido al efecto de la viscosidad del fluido. Es el caso del movimiento de la sangre en arterias y venas, en un tramo de estas que puede aproximarse a un conducto cilíndrico.

Ejemplo 6

En una tubería por la cual circula un líquido, se considera un trozo de esta delimitado por los puntos $(ABDC)$, de longitud (L) y radio interno (R) .

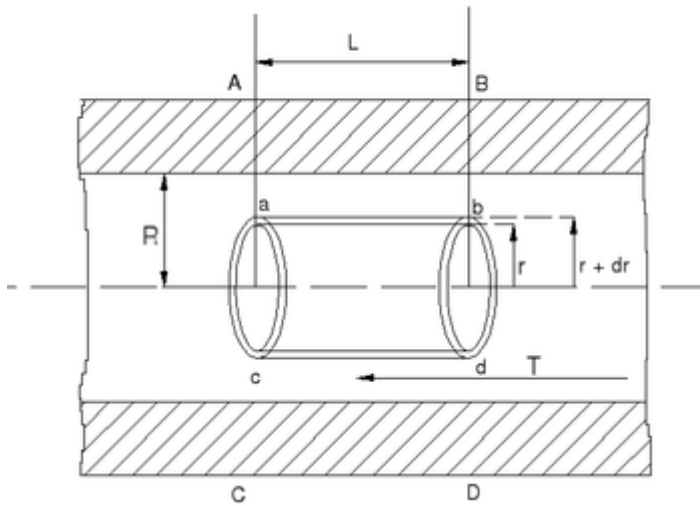
En el líquido circulante se considera un cilindro coaxial interno delimitado por los puntos (a,b,d,c) de radio (r) , con área transversal (11) y (22): $A=\pi r^2$ y área longitudinal: $AL=2\pi rL$

Figura 7

Esquema técnico que ilustra el flujo de un fluido a través de un tubo cilíndrico, representando el modelo utilizado en la Ley de Poiseuille.



Profundiza más



Nota. Tomado de <https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Poiseuille.png>

El flujo de un líquido puede describirse mediante la ley de Poiseuille, que establece que la velocidad del fluido $v(r)$ en un punto de la tubería es proporcional al cuadrado de la distancia al eje central, y sigue la ecuación:

$$v(r) = k(R^2 - r^2)$$

donde:

- R es el radio de la tubería,
- r es la distancia radial desde el centro,
- k es una constante que depende de las propiedades del fluido y la presión aplicada.

El flujo volumétrico total Q a través de la sección circular se calcula integrando $v(r)$ sobre el área de la sección transversal.

Planteamiento en coordenadas polares

El flujo volumétrico total Q está dado por:



Profundiza más

$$Q = \iint_D v(r) dA = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R v(r) r dr \right] d\theta$$

donde D es el dominio circular definido por $0 \leq r \leq R$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. En coordenadas polares, el elemento de área diferencial es $dA = r dr d\theta$.

Sustituyendo $v(r)$:

$$Q = \iint_D v(r) dA = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R k(R^2 - r^2) r dr \right] d\theta$$

Se puede apreciar que el valor de la velocidad depende de cuánto se aleja del centro; es decir, la máxima velocidad se obtiene cuando $r=0$ y va disminuyendo mientras más se acerca a las paredes cilíndricas. Es lo que se denomina perfil parabólico de velocidad.

Solución de la integral:

Primera integral (en r):

$$\int_0^R k(R^2 - r^2) r dr = kR^2 \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R - k \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{kR^4}{4}$$

Segunda integral (en θ):

$$Q = \int_0^{2\pi} \frac{kR^4}{4} d\theta = \frac{kR^4}{4} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{kR^4}{4} [2\pi - 0] = \frac{k\pi R^4}{2}$$

Resultado final:

Por lo tanto, el flujo volumétrico total Q es $\frac{k\pi R^4}{2}$ unidades cúbicas.



Profundiza más

Interpretación

El valor Q representa el flujo volumétrico total del líquido a través de la sección transversal de la tubería. Este valor también se conoce como caudal. Este cálculo permite diseñar sistemas de distribución de fluidos, como redes de agua potable o sistemas de refrigeración, garantizando que las tuberías puedan manejar el flujo necesario.

Este ejemplo demuestra cómo las integrales dobles en coordenadas polares se utilizan para resolver problemas prácticos en ingeniería y física, simplificando el análisis de sistemas con simetría radial.