



Profundiza más

Recurso de Profundización

Cambio de variables en la integral triple

Si en la integral triple $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ es necesario pasar de las variables x, y, z , a las variables u, v, w , relacionadas con las primeras por las igualdades $x = i(u, v, w)$, $y = j(u, v, w)$, $z = k(u, v, w)$ donde las funciones i, j, k :

- 1) Son continuas, junto con sus derivadas parciales de primer orden
- 2) Establecen una correspondencia biunívoca continua en los dos sentidos, entre los puntos de la región de integración V del espacio $OXYZ$ y los puntos de la región V' del espacio $O'UVW$.
- 3) El determinante funcional (**Jacobiano**) de estas funciones

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Conserva invariable su signo en el recinto V , entonces, será válida la ecuación:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f[i(u, v, w), j(u, v, w), k(u, v, w)] |J| du dv dw$$

En particular, en los siguientes casos:

- Para las coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

Al calcular J se obtiene como resultado $J = r$, entonces el cambio de variable queda como:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(r, \theta, z) r dr d\theta dz$$

- Para las coordenadas esféricas (ρ, θ, φ)

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta; \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta; \quad z = \rho \cos \varphi$$

Al calcular J se obtiene como resultado $J = \rho^2 \sin \varphi$, entonces el cambio de variables queda como:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(\rho, \theta, \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\varphi d\theta d\rho$$



Profundiza más

Son los casos de mayor aplicación en que los dos sistemas son ortogonales y la relación entre sus variables resultan muy fáciles de relacionar, el grado de complejidad cambia si el otro sistema no es ortogonal, es decir se encuentra en una base diferente a la ortogonal.

Aplicaciones Prácticas

Ejemplo: Cálculo del calor total almacenado en un cuerpo sólido

Determinar la energía térmica almacenada en una esfera maciza de radio R , cuya distribución de temperatura se encuentra dada por $T(x,y,z)$, con una densidad ρ y una capacidad calorífica c .

Solución:

La cantidad total de energía térmica Q en un volumen V , se encuentra integrando la densidad de energía térmica $U(x,y,z) = \rho c T(x,y,z)$.

$$Q = \iiint_V U(x,y,z) dV$$

Para escoger el orden de dV se debe analizar la complejidad de $U(x,y,z)$, además de la forma del volumen V de integración.

Para el caso del ejemplo, al tener un volumen esférico, se recomienda pasar a coordenadas esféricas para facilitar el cálculo, en próximas clases se analizará la metodología de transformación y se obtiene $U(r,\theta,\phi)$.

$$Q = \iiint_V U(r,\theta,\phi) r^2 \sin\theta d\phi d\theta dr = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} U(r,\theta,\phi) r^2 \sin\theta d\phi d\theta dr$$

Las integrales triples permiten calcular:

- Distribución de temperatura en objetos tridimensionales
- Flujo de calor en estructuras complejas
- Tiempo de enfriamiento de un objeto