



Profundiza más

Recurso de Profundización

Convexidad

La **convexidad** es un concepto fundamental en la teoría de la optimización y la economía. Permite determinar la forma de las funciones y el comportamiento de los conjuntos de soluciones, siendo clave para identificar si un punto crítico representa un **mínimo o máximo global**.

En la administración y economía, la convexidad se aplica en la asignación eficiente de recursos, la minimización de costos, la maximización de beneficios y la formulación de modelos de decisión racionales.

Una función o conjunto se dice convexo si, para cualquier par de puntos dentro de él, la línea recta que los une también pertenece al conjunto o queda por encima de la función.

Intuitivamente, la convexidad refleja formas "abombadas hacia arriba", en contraposición a la concavidad, que es "abombada hacia abajo".

a. Definición formal (conjuntos convexos).

Sea S un conjunto en $\mathbb{R}^n$. Se dice que S es **convexo** si, para cualesquiera dos puntos $x_1, x_2 \in S$ y para todo $\lambda \in [0,1]$:

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S$$

Esto significa que cualquier combinación lineal ponderada de dos puntos del conjunto también pertenece a él.



Profundiza más

b. Definición de funciones convexas.

Una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es **convexa** si:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

Para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in [0,1]$.

Gráficamente, esto implica que la recta que une dos puntos de la función siempre está por encima o coincide con la función misma.

c. Convexidad y Optimización.

La convexidad es central en los problemas de optimización porque garantiza que cualquier mínimo local sea también un mínimo global.

Esto simplifica el proceso de búsqueda de soluciones óptimas en modelos matemáticos económicos o administrativos.

Ejemplo

Supongamos una función de costos:

$$C(x) = x^2 + 4x + 5$$

- Su segunda derivada es $C''(x) = 2 > 0$, lo que indica que la función es **convexa**.



Profundiza más

- El punto donde la derivada se anula ($C'(x) = 2x + 4 = 0$) corresponde a un **mínimo global**.

Interpretación económica: El costo total es mínimo cuando $x = -2$. Cualquier desviación hacia más o menos producción aumentará los costos.

d. Propiedades de la Convexidad

En la siguiente figura se evidencian las propiedades de la convexidad.

Figura 7

Propiedades de convexidad

PROPIEDADES DE LA CONVEXIDAD

Suma de funciones convexas $f(x) + g(x)$ La suma de funciones convexas es también convexa.	Minimo de funciones convexas $\min f(x)$ El minimo de funciones convexas es convexo.
Composición con funciones lineales $f(g(x))$ Si f es convexa y $g(x) = a + bx$, entonces $f(g(x))$ también es convexa.	Condición de la segunda derivada $f''(x) > 0$ En funciones univariadas, si $f''(x) > 0$ para todo x, entonces $f(x)$ es convexa.

- La convexidad proporciona una estructura matemática confiable para resolver problemas de optimización económica y administrativa.
- Gracias a sus propiedades, permite garantizar la existencia de soluciones óptimas globales y simplificar el análisis de decisiones en contextos de recursos limitados, costos crecientes o mercados competitivos.



Profundiza más

1. Suma de funciones convexas: La suma de funciones convexas es también convexa.
2. Mínimo de funciones convexas: El mínimo de funciones convexas es convexo.
3. Composición con funciones lineales: Si f es convexa y $g(x) = a + bx$, entonces $f(g(x))$ también es convexa.
4. Condición de la segunda derivada: En funciones univariadas, si $f''(x) > 0$ para todo x , entonces $f(x)$ es convexa.

La convexidad proporciona una estructura matemática confiable para resolver problemas de optimización económica y administrativa.

Gracias a sus propiedades, permite garantizar la existencia de soluciones óptimas globales y simplificar el análisis de decisiones en contextos de recursos limitados, costos crecientes o mercados competitivos.

Una función convexa implica estabilidad y predictibilidad en la toma de decisiones óptimas.